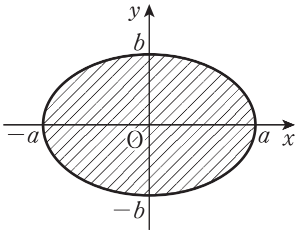
PART4 いろいろな曲線と面積

要点整理と公式

要点 ① 曲線で囲まれた図形の面積

$a>0$，$b>0$ のとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた部分の面積 S を求める。



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を y について解くと

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ は楕円の上半分を，$y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ は楕円の下半分を表している。

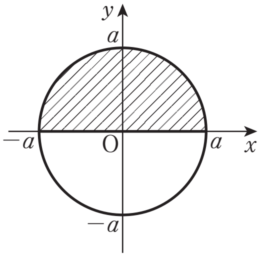
よって，求める面積 S は

$$S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$y=\sqrt{a^2-x^2} \iff x^2+y^2=a^2$，$y\geqq 0$ であるから，

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 a の円の上半分であ

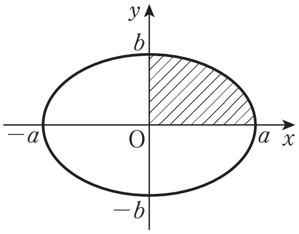
る。よって，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の半円の面積を表す。



したがって　$S=\dfrac{2b}{a}\cdot\qquad\quad=\pi ab$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，x 軸および y 軸に関して対称である。

よって，この楕円で囲まれた部分の面積は，右図の斜線部分（楕円の第 1 象限および x 軸，y 軸で囲まれた部分）の面積を 4 倍して求めることができる。すなわち



$$S=4\int_{0}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\cdot\qquad\quad=\pi ab$$

要点 ② 媒介変数で表された曲線と面積

$a>0$ とする。サイクロイド

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ \ y=a(1-\cos\theta)$$

の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求める。

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において $y\geqq 0$

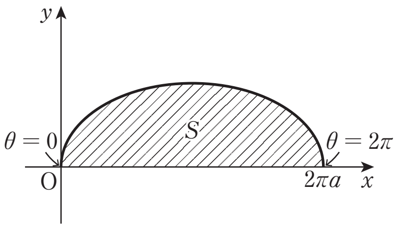
$y=0$ より $a(1-\cos\theta)=0$　　$\cos\theta=1$　　よって $\theta=0,\ 2\pi$

したがって，曲線と x 軸の共有点の x 座標は $x=a(0-\sin 0),\ a(2\pi-\sin 2\pi)$

すなわち $x=0,\ 2\pi a$

$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$ より，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において $\dfrac{dx}{d\theta}\geqq 0$（等号成立は $\theta=0,\ 2\pi$ のとき）

よって，求める面積は右図斜線部分の面積で



$S=$　　dx

$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$ より $dx=$

x と θ の対応は右の通り。

x	$0\ \to\ 2\pi a$
θ	$0\ \to\ 2\pi$

よって，　　　　　より

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\qquad\qquad\right)d\theta=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2$$

4 (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2) 媒介変数 θ によって，$x=2\cos\theta$，$y=\sin 2\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Point Pickup

曲線で囲まれた部分の面積

陰関数 $F(x,\ y)=0$ で表された曲線で囲まれた部分の面積は，陽関数 $y=f(x)$ で表して求めるとよい。その際，対称性に注目するとよい。

媒介変数で表された曲線と面積

媒介変数 t によって，$x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線と x 軸によって囲まれる図形の面積は，媒介変数 t を消去せず，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ であることを用いて，置換積分法

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

を用いて求めるとよい。t の変化に伴う x，y の増減に注意。

第20講 PART4 確認問題

1 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ で囲まれた図形の面積 S を求める。

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ を y について解くと，

$$y=\pm\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\sqrt{\boxed{ウ}-x^2}$$

$f(x)=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\sqrt{\boxed{ウ}-x^2}$ とおくと，S は，

$$S=\boxed{エ}$$

と表されるから，この定積分を計算すると，

$$S=\boxed{オ}\pi$$

$\boxed{エ}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $\int_{-2}^{2}f(x)dx$　　② $2\int_{-2}^{2}f(x)dx$

③ $\int_{-3}^{3}f(x)dx$　　④ $2\int_{-3}^{3}f(x)dx$

2 媒介変数 θ によって，$x=\sin\theta$，$y=\sin 2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求める。

曲線と x 軸との共有点の x 座標は,

$$x=0,\ \boxed{\text{カ}}$$

よって，$S=\displaystyle\int_0^{\boxed{\text{カ}}} y\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{\text{キ}}\,d\theta$$

と表され，この定積分を計算すると,

$$S=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

$\boxed{\text{キ}}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $\sin 2\theta\sin\theta$　　② $\sin 2\theta\cos\theta$

③ $\cos 2\theta\cos\theta$　　④ $2\sin 2\theta\cos\theta$

[MEMO]

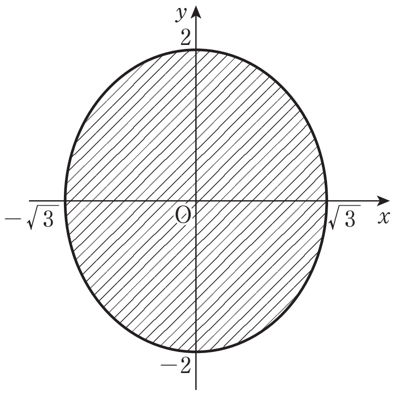
PART4 いろいろな曲線と面積

4 (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2) 媒介変数 θ によって，$x=2\cos\theta$，$y=\sin 2\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[解答]

(1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を y について解くと



$$y^2=4\left(1-\frac{x^2}{3}\right)=\frac{4}{3}(3-x^2)$$

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}$$

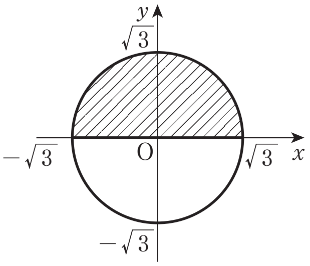
$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}$ は楕円の上半分を，

$y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}$ は楕円の下半分を表している。

よって，求める面積 S は

$$S=2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$$

ここで，$y=\sqrt{3-x^2}\iff x^2+y^2=(\sqrt{3})^2$，$y\geqq 0$ であるから，$y=\sqrt{3-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の円の上半分である。よって，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{3}$ の半円の面積を表す。



したがって　$S=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}\pi\cdot(\sqrt{3})^2=2\sqrt{3}\,\pi$

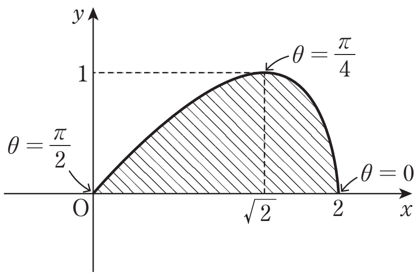
(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$0\leqq 2\theta\leqq\pi$　　よって $y\geqq 0$

$y=0$ より　　$2\theta=0$，π　　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{2}$

したがって，曲線と x 軸の共有点の x 座標は $x=0$，2

$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$ より $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $\dfrac{dx}{d\theta}\leqq 0$（等号成立は $\theta=0$ のとき）

よって，求める面積は右図斜線部分の面積で



$$S=\int_0^2 ydx$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$ より $dx=-2\sin\theta d\theta$

x と θ の対応は右の通り。

x	$2\ \to\ 0$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$

よって，置換積分法より

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin 2\theta(-2\sin\theta)d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta$$

$$=4\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$$

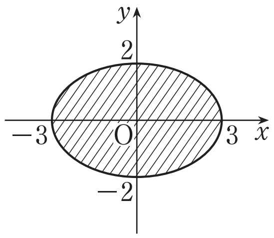
第20講 PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3，ウ：9，エ：④，オ：6

[解説]

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を y について解くと，

$$y^2=4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$$
$$=\frac{4}{9}(9-x^2)$$
$$\boldsymbol{y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}$$



$f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ とおくと，

$y=f(x)$ は楕円の上半分を，$y=-f(x)$ は楕円の下半分を表している。

よって，求める面積 S は，

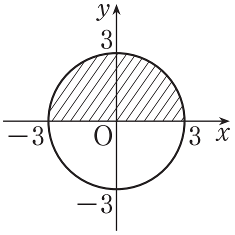
$$S=2\int_{-3}^{3}\boldsymbol{f(x)dx}$$ [A]

$$=\frac{4}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

[A]　楕円の上半分の面積の 2 倍である。

ここで，

$$y=\sqrt{9-x^2}$$
$$\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2=9$$
$$(y\geqq 0)$$



であるから，$y=\sqrt{9-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 3 の円の上半分である。よって，$\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ は，半径 3 の半円の面積を表す。[B]

[B]　$\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ の値は，半円の面積に等しくなるので，このことを利用すると，積分計算をせずに求められる。

したがって，

$$S=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2=\boldsymbol{6\pi}$$

2

[正解] カ：1，キ：②，ク：2，ケ：3

[解説]

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$

よって，$y \geqq 0$

$y = 0$ より，$2\theta = 0$，π

$$\theta = 0,\ \frac{\pi}{2}$$

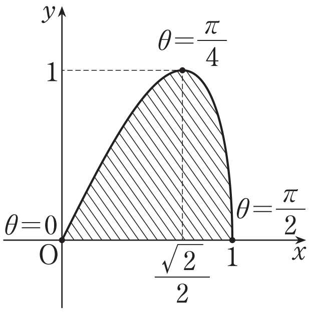
したがって, 曲線と x 軸との共有点の x 座標は,

$$x = 0,\ \mathbf{1}$$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において,

$$\frac{dx}{d\theta} \geqq 0 \quad (\text{等号成立は } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき})$$

よって，求める面積は，次の図の斜線部分の面積である。



$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より，$dx = \cos\theta d\theta$

x と θ の対応は右の通り。

よって，置換積分法より，

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$

$$S = \int_0^1 y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{\sin 2\theta \cos\theta d\theta}$$ [C]

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta(-\cos\theta)' d\theta$$

[C]　$x = f(t)$，$y = g(t)$ のとき,

$$\frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta g(t) f'(t) dt$$

x	a	$\to$	b
t	α	$\to$	β

$$=-2\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2\left(0-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$